

1 Enunciado

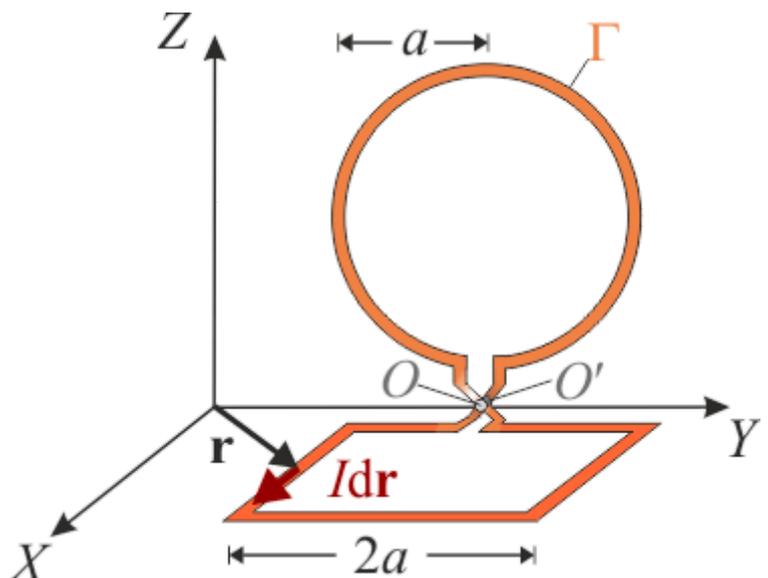
Se ha construido una antena consistente en dos pequeñas espiras planas contenidas en sendos planos ortogonales y conectadas entre sí tal como se indica en la figura. La que está situada en el plano $z = 0$ tiene forma cuadrada, siendo $2a$ la longitud de sus lados. La contenida en el plano $x = 0$ es una circunferencia de radio a . ¿Cuál es el momento dipolar magnético de la antena cuando una intensidad de corriente I recorre la espira cuadrada en sentido antihorario (ver figura)?

2 Solución

La antena consiste en un conductor filiforme que describe un circuito cerrado Γ . Cuando es recorrida por una corriente eléctrica con la intensidad I y en el sentido indicado por el elemento de corriente $I d\mathbf{r}$, la antena se comporta a grandes distancias como un dipolo magnético que estará caracterizado por un momento dipolar magnético,

$$\vec{\mu} = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

donde \mathbf{r} es el radio-vector variable que indica la posición de los puntos del circuito respecto de un punto fijo arbitrariamente elegido. Obsérvese que, al cruzarse su trazado, existen dos puntos del conductor, O y O' , a los que corresponden elementos de corriente distintos pero que coinciden en un mismo punto geométrico. De esta forma, la anterior integral se puede descomponer en la suma de dos integrales a lo largos de sendas curvas cerradas:



$$\vec{\mu} = \frac{I}{2} \left[\oint_{O(\partial\Sigma_1)} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} + \oint_{O'(\partial\Sigma_2)} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \right]$$

una de forma circular, que denominaremos $\partial\Sigma_1$, y otra $\partial\Sigma_2$, de forma cuadrada.

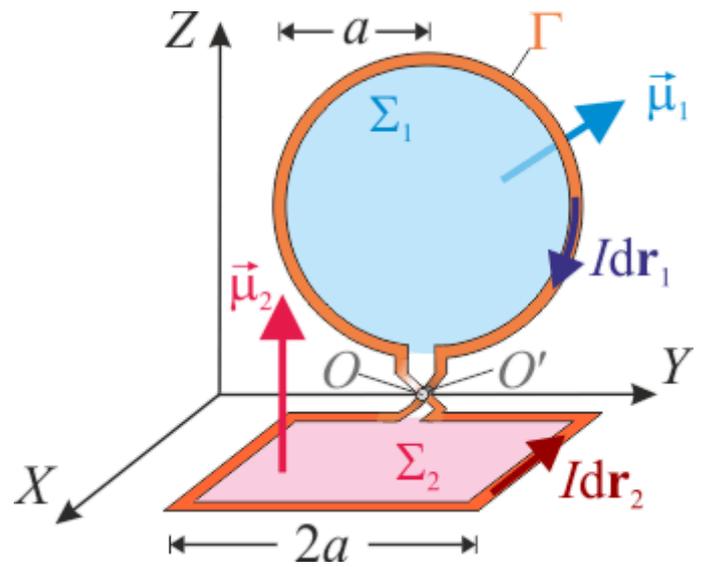
Pero, cada uno de los términos de la anterior expresión es, por definición el momento dipolar magnético de la espira correspondientes. Y como $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$ son espiras contenidas en sendos planos ortogonales, el momento dipolar de cada una de ellas será un vector de dirección perpendicular al plano de la espira y módulo igual al producto de la intensidad de corriente por el área de la

superficie plana que encierra; el sentido del momento dipolar está determinado por el sentido en que la corriente recorre la espira plano, según el criterio del triedro directo:

$$\vec{\mu}_1 = \frac{I}{2} \oint_{\partial\Sigma_1} \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1 = -I\pi a^2 \mathbf{i}$$

$$\vec{\mu}_2 = \frac{I}{2} \oint_{\partial\Sigma_2} \mathbf{r}_2 \times d\mathbf{r}_2 = I4a^2 \mathbf{k}$$

Sumando estos dos términos, obtenemos el momento dipolar magnético de la antena Γ :



$$\vec{\mu} = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 = I a^2 (-\pi \mathbf{i} + 4 \mathbf{k})$$